Ejercicios de Análisis Matemático
Derivadas 2

1. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x)$. ¿Cuándo se da la igualdad?
2. Estudia el número de ceros reales de la función $f(x) = 2^x - 1 - x^2$.
3. Calcula los límites siguientes.

   a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}$ *b*) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$

   c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}$ *d*) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+2x)}$

   e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{3\operatorname{sen} x - 3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x}$ *f*) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

4. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 centímetros. Se supone que el rectángulo se apoya sobre un lado del triángulo.
5. Determina un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.
6. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:
   a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.
   b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.
7. Calcula, usando un polinomio de Taylor conveniente, un valor aproximado del número $\sqrt{\mathrm{e}}$ con un error menor que 10^{-4}.

Lecturas obligatorias. Debes leer y entender las definiciones y resultados principales del Capítulo 6, pero no es preciso que estudies las demostraciones.

Lecturas optativas. Para una comprensión correcta de los procesos del Cálculo conviene tener una idea del infinito matemático. La lectura de la sección 5.4 del Capítulo 5 “Breve historia del infinito” trata de este asunto desde una perspectiva filosófica y matemática.